Unidade III- Determinantes

1- Situando a Temática

A teoria dos determinantes tem origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares. Hoje em dia, embora não seja um instrumento para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, no estudo da análise vetorial, hoje essencial em todas as áreas que dependem das ciências exatas.

Nesta unidade, iremos conceituar determinante de uma matriz quadrada de ordem *n*, para qualquer valor de *n*, bem como retomar a discussão de um sistema linear através do determinante da matriz principal. Desenvolveremos ainda, o cálculo para encontrar a matriz inversa de uma determinada matriz quadrada.

2- Problematizando a Temática

Na unidade II, discutimos e resolvemos sistemas lineares pelo método do escalonamento.

Desta forma, considere o sistema linear $S_1:\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$.

Utilizando o método de escalonamento, obteremos o sistema linear

$S_2:\begin{cases} ax+by=p \\ (cd+cb)y=aq-cp \end{cases}$, que é equivalente ao sistema S_1 cuja matriz principal é $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Note, em S_2, que haverá um único valor de y que satisfaz a última equação se, somente se, o coeficiente de *y*, $ad-cb$, for diferente de zero e conseqüentemente haverá um único valor de *x* satisfazendo o sistema e, assim, o sistema será possível e determinado.

Observe que o coeficiente de $ad-cb$ nada mais é do que a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária da matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O coeficiente $ad-cb$ é chamado determinante da matriz principal $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do sistema linear S_1.

3 – Conhecendo a Temática

3.1 – Conceitos e Definições

Definição: O determinante de uma matriz quadrada $M=[a_{11}]$ de ordem 1 é igual ao número real a_{11}.

Essa definição provém do sistema 1x1, $S: a_{11}x_1=b_1$, cuja solução depende do coeficiente a_{11}. Note ainda que a matriz principal do sistema *S* é $M=[a_{11}]$.

Definição: O determinante de uma matriz quadrada $M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é dado por: $\det M = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Indicaremos por $\det A$, o determinante associado à matriz quadrada *A*.

Na seção anterior, vimos que o número real $\det M = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ está ligado a solução do sistema $S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$.

Vimos até agora a definição de determinante associada às matrizes de ordem 1 ou ordem 2. De modo geral, na resolução de um sistema linear *n* x *n*, verifica-se um cálculo padrão que se mantém para qualquer valor de *n*. O número resultante desse cálculo é chamado de determinante.

O matemático francês Marquês de Laplace descobriu que, dada uma matriz quadrada de ordem *n,* é possível calcular seu determinante usando determinantes de matrizes de ordem $n-1$.

Assim, a partir dos determinantes de matrizes de ordem dois, calculamos os de ordem três, com os determinantes de ordem três calculamos os determinantes de ordem quatro e assim sucessivamente.

Para facilitar o entendimento sobre o teorema de Laplace, vamos conhecer algumas definições.

3.2 - Menor Complementar

Definição: Seja *M* uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O menor complementar do elemento a_{ij} de *M*, denotada por MC_{ij}, é o determinante da matriz quadrada que se obtém eliminando a linha *i* e a coluna *j* da matriz *M.*

Exemplo 1: Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

i) O menor complementar do elemento a_{11} (retirando a 1° linha e a 1° coluna de M) é o determinante da matriz $D_{11} = [3]$, ou seja, $MC_{11} = 3$.

ii) O menor complementar do elemento a_{12} é o determinante da matriz $D_{12} = [-1]$, ou seja, $MC_{12} = -1$.

Exemplo 2: Considere agora a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

- O menor complementar do elemento a_{23} é o determinante da matriz $D_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, ou seja, $MC_{23} = 8$ (perceba que foi eliminada a 2ª linha e a 3ª coluna da matriz M).
- O menor complementar do elemento a_{32} é o determinante da matriz $D_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $MC_{32} = 14$.

3.3- Cofator

Definição: Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O cofator do elemento a_{ij} de *M* é o número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} MC_{ij}$, em que MC_{ij} é o menor complementar de a_{ij}.

Exemplo 3: Se $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, então:

- Cofator de a_{21}: temos que $MC_{21} = \det\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = -2$ e assim

$$A_{21} = (-1)^{2+1} MC_{21} = (-1)^3(-2) = 2$$

- Cofator de a_{13}: temos que $MC_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 1$ e assim

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.MC_{13} = (-1)^4.(1) = 1.$$

Observação: Note que $A_{ij} = MC_{ij}$ se $i + j$ é par; $A_{ij} = -MC_{ij}$ se $i + j$ é ímpar.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo este conteúdo. Acesse e participe!

3.4- Teorema de Laplace

Teorema: O determinante associado a uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha i (ou de uma coluna j) qualquer pelos respectivos cofatores, ou seja,

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \cdots a_{in}.A_{in}.$$

Exemplo 4: Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Já sabemos que *det M = 2.3 - 1.(-4)=10.* Vamos utilizar o teorema de Laplace para calcular *det M.* Primeiramente iremos escolher qualquer linha desta matriz. Escolhamos a 1º linha.
Daí $\det M = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12}$, onde A_{11} e A_{12} são os cofatores de a_{11} e a_{12} respectivamente.
Temos que:

- $A_{11} = (-1)^{1+1}.\ MC_{11} = (-1)^2.3 = 3$
- $A_{12} = (-1)^{1+2}.\ MC_{12} = (-1)^3.(-4) = 4$

Portanto o determinante da matriz é dado por $\det M = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$.

Exemplo 5: Vamos calcular o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Aplicaremos o teorema de Laplace utilizando a 3ª linha.
Sabemos que $\det M = a_{31}.A_{31} + a_{32}.A_{32} + a_{33}.A_{33}$ onde:

- $A_{31} = (-1)^{3+1}.MC_{31} = (-1)^4.\det\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (1).10 = 10$;
- $A_{32} = (-1)^{3+2}.MC_{32} = (-1)^5.\det\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = (-1).(-4) = 4$;
- $A_{33} = (-1)^{3+3}.MC_{33} = (-1)^6.\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (1).8 = 8$.

Portanto, *det M = 0.10 + 5.4 + 6.8 = 68.*

3.4.1 – Regra de Sarrus

O matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) estudou a seguinte situação:

Dada uma matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ de ordem 3 e aplicando o teorema de Laplace na 1ª linha de *M* teremos:

$$\det M = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} =$$
$$= \left(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}\right) - \left(a_{13}.a_{22}.a_{31}. + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}\right).$$

Pierre Sarrus observou que as seis parcelas do cálculo de *det* M_{3x3} podem ser obtidas da seguinte forma:

i) Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da 3º coluna de *M*;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ii) Realizamos a soma dos produtos dos elementos que estão na direção paralela a diagonal principal;

Paralelas da diagonal principal

iii) Realizamos a soma dos produtos dos elementos que estão na direção paralela a diagonal secundária;

Paralelas da diagonal secundária

iv) o determinante é a diferença entre o número obtido no passo (ii) e o número obtido no passo (iii), ou seja,

$$\det M = \underbrace{\left(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}\right)}_{\text{Paralelas da diagonal principal}} - \underbrace{\left(a_{13}.a_{22}.a_{31}. + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}\right)}_{\text{Paralelas da diagonal secundária}}.$$

Exemplo 6: Vimos no exemplo 5 que o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é *detM = 68.*

Utilizaremos a regra de Sarrus para encontrar o valor de *detM.*

Temos:

Logo *detM* = 52 – (–16) = 68.

Trocando Experiência...

A regra de Sarrus é bastante utilizada em sala de aula. Muitos professores apresentam primeiramente esta regra para depois introduzir o teorema de Laplace, o qual vimos ser necessário para o cálculo de determinante de matrizes de ordem maior que 3. Na verdade, os problemas propostos no que diz respeito ao cálculo do determinante são em sua maioria problemas envolvendo, no máximo, matrizes quadradas de ordem 3. O mesmo acontece com sistemas de equações lineares e assim muitos dos nossos alunos sentem dificuldades em encontrar o determinante de uma matriz de ordem quatro por exemplo, ou resolver um sistema linear com 4 incógnitas e 3 equações.

Exercício 1: Calcule o determinante das matrizes I_2, I_3 e I_4. Qual é o valor do determinante de I_n, para qualquer $n \geq 1$? Você consegue provar este resultado?

Exercício 2: Se uma matriz tem uma fila (linha ou coluna) toda nula, qual é o valor do seu determinante? Prove a sua afirmação.

Exercício 3: Calcule o determinante das matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

O que estas matrizes têm de peculiar?

Exercício 4: Prove que $det\ M = det\ M^t$.

Exercício 5: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual a relação entre as duas matrizes? Qual a relação entre os seus determinantes?

Exercício 6: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Qual a conclusão que você pode tirar?

3.5 – Propriedades dos Determinantes

O estudo das propriedades dos determinantes facilitará, em muitos casos, o cálculo dos determinantes. Nos exercícios de 1 a 6, você deduziu algumas propriedades dos determinantes de matrizes. Veremos agora estas propriedades de maneira formal.

Propriedades

P1) Se uma matriz quadrada M possui uma fila (linha ou coluna) nula, seu determinante é zero.

O exercício 2 é um exemplo da aplicação desta propriedade.

P2) Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada M forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, $det\ M = 0$.

A matriz M do exercício 3 é um exemplo da aplicação desta propriedade.

P3) Se uma matriz possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo.

Dizer que duas linhas são proporcionais significa dizer que os elementos de uma delas são k ($k \neq 0$) vezes os elementos correspondentes da outra. O exercício 3 é um exemplo desta proposição.

Exercício 7: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; e \; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 14 & 10 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Qual a relação entre as duas matrizes? Qual a relação entre os seus determinantes?
P4) Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) por um número real *k*, o determinante da nova matriz é o determinante da matriz original multiplicado por *k*.

Como aplicação de P4, temos a seguinte propriedade.
P5) Se uma matriz quadrada *M* de ordem *n* é multiplicada por um número real *k*, então $det(k \cdot M) = k^n . detM$.

No exercício 4 você provou a seguinte proposição:
P6) O determinante de uma matriz quadrada *M* é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $det\ M = det\ (M^t)$.

O exercício 5 ilustra a proposição:
P7) Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o determinante da matriz original com o sinal invertido.

Os exercícios 1 e 6 referem-se à seguinte propriedade:
P8) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

P9) (Teorema de Binet) Sejam *M* e *N* duas matrizes quadradas de mesma ordem. Então $\det(MN) = \det M . \det N$

P10) (Teorema de Jacobi) Se somarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada uma outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer, o determinante da matriz não se altera.

Por exemplo, dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, o seu determinante é 68. Substituindo

a 2º linha de *M* pela soma desta linha com o produto da 1º linha por -3, isto é,

($L_2 \to L_2 + (-3)L_1$) obteremos: $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -8 & -8 & -10 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e *detN* = 68 = *detM.*

3.6 – Aplicações do Determinante

3.6.1 – Determinação da Matriz Inversa

Como vimos na unidade II uma matriz quadrada *M* de ordem *n* é invertível se, e somente se, existe uma matriz M^{-1} tal que: $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem *n*.

Exercício 1: Mostre que a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 2: Calcule os determinantes das matrizes *A* e *B* do exercício anterior. Qual a relação que existe entre det *A* e det *B*?

Vamos estabelecer uma maneira que nos permita o cálculo de matriz inversa utilizando o nosso conhecimento de sistemas lineares. Para isso necessitamos do seguinte teorema.

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Demonstração:

Sendo A de ordem n, então A é invertível $\Leftrightarrow$ existe A^{-1} tal que $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}.A\right) = \det\left(I_n\right) \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}\right).\det\left(A\right) = \det\left(I_n\right)$, veja propriedade 9 (P9).

Como $\det I_n = 1$, teremos que: $\det\left(A^{-1}\right).\det A = 1 \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Portanto a matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

> **Observação:** Note que, durante o processo de demonstração do teorema, obtivemos que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. Desta forma, podemos concluir que matrizes inversas têm determinantes inversos.
> Volte ao exercício 2 e verifique tal afirmação.

Exemplo: Verifique se a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ é invertível. Em caso afirmativo determine M^{-1}.

Como $\det M = 5 - 3 = 2 \neq 0$, então, pelo teorema anterior, M admite uma matriz inversa

$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e mais $\det M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} = \dfrac{1}{2}$.

Assim, temos: $A^{-1}.A = I_2$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+3b & a+5b \\ c+3d & c+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ a+5b=0 \\ c+3d=0 \\ c+5d=1 \end{cases}$$

o qual é um sistema linear onde podemos, neste caso, resolver os sistemas $(I)\begin{cases} a+3b=1 \\ a+5b=0 \end{cases}$ e $(II)\begin{cases} c+3d=0 \\ c+5d=1 \end{cases}$, separadamente.

Pelo sistema (I) encontramos $a = \dfrac{5}{2}$ e $b = \dfrac{-1}{2}$ e, através do sistema (II), encontramos $c = \dfrac{-3}{2}$ e $d = \dfrac{1}{2}$. Portanto $M^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Você já deve ter notado, pelo exemplo anterior, como iremos verificar se uma matriz quadrada M de ordem n admite uma matriz inversa M^{-1} de ordem n e, além disso, M^{-1} será determinada resolvendo o sistema linear obtido através da equação matricial $M^{-1}.M = I_n$.

3.6.2 – Resolução de um Sistema Linear $n \times n$ pela Regra de Cramer

Considere o sistema linear 2x2 $S: \begin{cases} 3x + y = 7 \\ -2x + 4y = -14 \end{cases}$ que é um sistema possível e determinado cuja solução é $x = 3$ e $y = -2$.

O sistema S pode ser representado na forma matricial $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$, onde a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz principal do sistema. Note que $\det A = 14 \neq 0$.

- Substituindo a 1ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz

  $A_x = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_x = 42$.

- Substituindo a 2ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz $A_y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -14 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_y = -28$.

A regra de Cramer, a qual descrevemos logo após, estabelece que:

$x = \dfrac{\det A_x}{\det A}$ e $y = \dfrac{\det A_y}{\det A}$. Portanto $x = \dfrac{42}{14} = 3$ e $y = \dfrac{-28}{14} = -2$, que nada mais é do que a solução do sistema *S*.

Regra de Cramer

Um sistema linear n x n, $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ é denominada matriz principal do sistema S, é possível e determinado se, e somente se, $\det A \neq 0$ e a sua única solução é dada por $x_1 = \dfrac{\det A_{x1}}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\det A_{x2}}{\det A}, \cdots x_n = \dfrac{\det A_{xn}}{\det A}$ onde $A_{x1}, A_{x2} \ldots A_{xn}$ são as matrizes obtidas substituindo-se, respectivamente, a coluna dos coeficientes de $x_1, x_2, \ldots x_n$ pela coluna dos termos independentes.

A regra de Cramer decorre do fato de que podemos representar o sistema *S* na forma matricial $A.X = B$, onde *A* é a matriz principal (ou dos coeficientes), *X* matriz das incógnitas e *B* matriz dos termos independentes.

Se $\det A \neq 0$ então a matriz *A* admite uma inversa A^{-1} e assim:

$$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \Rightarrow (A^{-1}.A).X = A^{-1}.B \Rightarrow I_n.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B.$$

Logo, concluímos que existe uma única matriz X que é solução de $AX = B$, e, portanto, o sistema *S* é possível e determinado.

> **Observação:**
> Com base na regra de Cramer podemos classificar um sistema linear n x n.
> I) Quando $\det A \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
> II) Quando $\det A = 0$ e $\det A_{x1} = \det A_{x2} = \cdots = \det A_{xn} = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.
> II) Quando $\det A = 0$ e pelo menos um dos determinantes, $\det A_{x1}, \ldots, \det A_{xn}$, for diferente de zero, o sistema é impossível.

4 – Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade, além de introduzirmos os conceitos de determinante, apresentamos o teorema de Laplace que permite calcular o determinante de matrizes quadradas de qualquer ordem. Conhecemos dez propriedades que permitirão o cálculo do determinante com maior praticidade.

Desenvolvemos ainda uma discussão do uso dos determinantes nos sistemas lineares de ordem *n*x*n*, em especial nas matrizes 2x2 e 3x3, através da regra de Cramer, assim como o seu uso no cálculo da matriz inversa.

Esperamos que o conhecimento adquirido e discutido nesta unidade possa auxiliar você na resolução de problemas que envolvam determinantes, bem como sistemas de equações lineares. Na plataforma Moodle você encontrará exercícios complementares para um maior aprofundamento nos conteúdos das unidades I, II e III. Acesse e participe.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 1. 2000.

2. IEZZI, G. Dolce, O. Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1, Editora Atual, 8 ª ed. 2004.

3. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

4. LIMA, Elon L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, 2ª Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

5. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 2. 2002.